Дәріс 9. Оқшауланған ерекше нүктелер. Лоран қатарлары. Бірмәнді сипатты оқшауланған ерекше нүктелердің типтері

1 Лоран қатарлары

Дәрежелік көрсеткіштері бүтін дәрежелік қатарлар Лоран қатарлары деп аталады. Лоран қатарлары - бұл Тейлор қатарларының жалпыламасы. Лоран қатарларының қасиеттерін зерттейік.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k$$

түріндегі қатарды қарастырамыз. Қатардың қосындысы ретінде

$$- \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k \left(z-z_0\right)^k$$

$$- \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{k=-n}^{m} c_k \left(z-z_0\right)^k$$

$$- \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k \left(z-z_0\right)^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k \left(z-z_0\right)^k$$

шектерінің бірін алуға болады.

Лоран қатарының қосындысы ретінде соңғы анықтаманы таңдаймыз

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k \left(z-z_0\right)^k + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k \left(z-z_0\right)^k$$

Теорема 14. (П. Лоран, 1843) *Лоран қатарының қосындысы қандай да бір сақинада голоморфты.*

Дәлелдеуі.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k \left(z-z_0\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(z-z_0\right)^k \equiv S_{-}(z) + S_{+}(z)$$

болғандықтан $S_{-}(z), S_{+}(z)$ функцияларын бөлек зерттеу қажет. $S_{+}(z)$ – Тейлор қатарының қосындысы болғандықтан, $S_{+}(z)$ - центрі z_0 нүктесіндегі B_{+}

дөңгелегінде голоморфты функция. $W = (z - z_0)^{-1}$ деп белгілейік, онда $S_-\left(z_0 + \frac{1}{W}\right) \equiv g(W)$ функциясы W жазықтығындағы $|W| < \varepsilon$ дөңгелегінде голоморфты функция. z жазықтығында бұл, $S_+(z)$ функциясы - $B_- : |z - z_0| > \frac{1}{\varepsilon}$ дөңгелегінің сыртындағы голоморфты функция екенін білдіреді. Демек, $B_+ \cap B_-$ дөңгелектерінің қиылысуында $S_-(z) + S_+(z)$ қосындысы голоморфты функция болады.

Енді кері тұжырымды дәлелдейік.

Теорема 15. *Ашық сақинада голоморфты функция осы сақинада Лоран қатарына жіктеледі.*

Дәлелдеуі. $f(z)$ функциясы $\delta < |z - z_0| < \Delta$ сақинасында голоморфты болсын. z нүктесі бойынша сақинадан δ_1, Δ_1 сандарын,

$$\delta < \delta_1 < |z - z_0| < \Delta_1 < \Delta$$

болатындай етіп таңдаймыз. Онда Коши интегралдық формуласына сәйкес

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t - z_0| = \Delta_1} \frac{f(t)}{t - z} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t - z_0| = \delta_1} \frac{f(t)}{t - z} dt \equiv A - a$$

болады. Бұл жағдайда $|z - z_0| < |t - z_0|$ болғандықтан A үшін дәрежелік қатарға жіктеу 9-теореманың дәлелдеуін сөзбе-сөз қайталайды. Осылайша, $A = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \cdots$. a үшін дәрежелік қатарға жіктеуді жазамыз

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t - z_0| = \delta_1} \frac{f(t)}{t - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t - z_0| = \delta_1} \frac{f(t)}{(t - z_0) - (z - z_0)} dt = \\ &= \left| \begin{array}{c} t - z_0| < |z - z_0|| \\ \text{болғанда} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|t - z_0| = \delta_1} \left\{ \frac{f(t)}{z - z_0} + \frac{f(t)(t - z_0)}{(z - z_0)^2} + \frac{f(t)(t - z_0)^2}{(z - z_0)^3} + \cdots \right\} dt \end{aligned}$$

Бұдан

$$-a = c_{-1} \frac{1}{(z - z_0)} + c_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

қатынасын аламыз. Теорема дәлелденді.

14-теорема салдары. $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t - z_0| = \delta_1} f(t) dt$, *яғни интегралдың мәні Лоран қатарына жіктелуінің коэфиценттерінің біріне сәйкес келеді.*

Демек, интегралды есептеудің орнына Лоран қатарына жіктеуге болады. Бұл өте маңызды салдар.

2 Бірмәнді сипатты оқшауланған ерекше нүктелердің классификациясы

Бейнелеу голоморфты не аналиталық болған нүктелерді бейнелеудің регулярлы нүктелері деп атайық. Голоморфтылық не аналитикалық қасиет бұзылған нүктелерді бейнелеудің ерекше нүктелері деп атайық. Ерекше нүкте берілген бейнелеудің оқшауланған ерекше нүктесі болады, егер ерекше нүктенің, регулярлы нүктелерден тұратын, ойылған аймағы табылса. Оқшауланған ерекше нүктелерді екі түрге бөлеміз: бірмәнді және көпмәнді сипатты. Бұл жерде біз тек бірмәнді функцияларды [18] қарастырамыз. D облысында бірмәнді $f(z)$ функциясы берілсін. $f(z)$ D облысының $\{z_1, z_2, \ldots, z_s : s < \infty\}$ нүктелерінен басқа нүктелерінде голоморфты болсын дейік. $\{z_1, z_2, \ldots, z_s : s < \infty\}$ ерекше нүктелерінің ішінде бірдей нүктелер жоқ деп есептейміз. Онда көрсетілген нүктелердің әрқайсысы $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктелері болады. z_1 нүктесінің қандай да бір ойылған аймағын алып, 15-теоремаға сәйкес $f(z)$ функциясын Лоран қатарына жіктейміз

$$f(z) = \underbrace{\cdots + c_{-2}\left(z - z_1\right)^{-2} + c_{-1}\left(z - z_1\right)^{-1}}_{\text{басты бөлігі}} + \underbrace{c_0 + c_1\left(z - z_1\right) + c_2\left(z - z_1\right)^2 + \cdots}_{\text{дұрыс бөлігі}}$$

$\left(z - z_1\right)^{-j}$ теріс дәрежелі мүшелерінің қосындысын Лоран жіктеуінің бас бөлігі деп атайық, ал қалған қосылғыштар дұрыс бөлікті береді. Оқшауланған ерекше нүктелер бас бөліктегі қосындылардың санына қарай келесі түрлерге бөлінеді:

1. жөнделетін оқшауландан ерекше нүкте, егер бас бөлігі жоқ болса,
2. k-ретті полюс, егер бас бөлік қосындылардың ақырлы санынан тұрса және k бас бөліктегі $\left(z - z_1\right)^{-j}$ теріс дәрежесінің ең аз көрсеткіші болса,
3. елеулі ерекше нукте, егер бас бөлігінде ақырсыз көп қосындылар болса.

Мысалдар.

1. $\frac{\sin z}{z} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{особая точка } z_1 = 0 \\ \text{разложение Лорана в окр. } z_1 = 0 \\ \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots \end{array} \right.$

[018] Бір жерде голоморфтылықтың анықтамасында бейнелеудің бірмәнді болуына талап қойылған. Аналитикалық жағдайда мұндай талап жоқ, бұл жағдайда дәрежелік қатарға локалды жіктелу мүмкіндігіне талап қойылады.

$$2.\ \frac{4z+2}{z^2-1} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1, z_2 = -1 \\ = \frac{3}{z-1} + [z = 1 \text{ маңайында голоморфты } \equiv \text{ дұрыс бөлігі }] \\ z_1 = 1 - \text{ бірінші ретті полюс} \\ z_2 = -1 - \text{ бірінші ретті полюс} \end{cases}$$

$$3.\ e^{\frac{1}{z}} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = 0 \\ e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots \\ z_1 = 0 - \text{ елеулі ерекше нүкте} \end{cases}$$

$$4.\ \frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \Rightarrow \begin{cases} z_0 = 0, z_k = \frac{1}{k}, \forall k \in \square \\ \text{оқшауланған ерекше нүктелер} z_k = \frac{1}{k}, \forall k \in \square \\ \text{оқшауланбаған ерекше нүкте } z_0 = 0, \text{ себебі } 0 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \end{cases}$$

Соңғы мысалда оқшауланбаған ерекше нүкте көрсетілген. Мұндай нүктелер КАФТ-ның келесі курстарында зертеледі.

Оқшауланған ерекше нүктенің түрін сәйкес Лоран қатарына жіктеу арқылы анықтау тиімді бола бермейді. Төменде, қолданылуы еңбекті азырақ қажет ететін тұжырымдар келтірілген.

Теорема 16. (Жөнделетін ерекше нүкте критерилері) $z_1 - f(z)$ *функиясының оқұауланган ерекие нүктесі болсын. Келесі сөйлемдер пара-пар:*

1. z_1 *- оқшауланган ерекше нүкте,*
2. $\lim_{z\to z_1} f(z)$ *ақырлы шегі табылады*

Дәлелдеуі.

$1 \Rightarrow 2$, онда Лоран жіктелуінің бас бөлігі жоқ, дұрыс бөлігінің шегі қашан да бар және ол ақырлы.

$2 \Rightarrow 1$, онда $f(z)$ - z_1 нүктесінің аймағында шектеулі функция, бұл Лоран жіктелуінің $(z-z_1)^{-j}$ теріс дәрежелерінің бар екеніне қайшы.

Теорема 17. (Полюс критерилері) z_1 - $f(z)$ *функиясының оқшауланган ерекше нүктесі болсын. Келесі сөйлемдер пара-пар:*

3. z_1*-полюс,*

4. $\lim\limits_{z\to z_1} f(z)$ *ақырлы шегі табылады.*

Дәлелдеу. $3 \Rightarrow 4$. Онда Лоран жіктелуінің бас бөлігі $c_{-j}(z-z_1)^{-j}$ түріндегі қосындылардың ақырлы санын қамтиды. Мұндай қосындылардың шегі шексіздікке тең, ал дұрыс бөлігінің шегі қашан да бар және ол ақырлы. Онда олардың косындысы шексіздікке тең.

$4 \Rightarrow 3$. $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ функциясын енгіземіз. Онда z_1 нүктесі $g(z)$ үшін не регулярлы нүкте, не оқшауланған ерекше нүкте. $\lim\limits_{z \to z_1} g(z) = 0$ ақырлы шегі табылады. 16 теоремадан, z_1 нүктесі $g(z)$ функциясының жөнделетін ерекше нүктесі екені шығады. $g(z)$ функциясын $g(z_1) = 0$ деп алдын-ала анықтаймыз. Онда $g(z)$ функциясы z_1 аймағындағы голоморфты функция, z_1 - $g(z)$ функциясының нолі. 9 теореманың 3 салдарынан $g(z) = (z - z_1)^k h(z), h(z) \in H(|z - z_1| < \delta), h(z_1) \neq 0$ өрнегі шығады. Бұдан $f(z) = (z - z_1)^{-k} \dfrac{1}{h(z)}$ өрнегін аламыз, соңғы теңдіктің оң жағындағы екінші көбейткіш локалды голоморфты функцияны өрнектейді, сондықтан оның жіктелуінде $(z - z_1)^{-j}$ теріс дәрежелері жоқ. $f(z)$ функциясының сәйкес Лоран жіктелуінде $(z - z_1)^{-j}$ теріс дәрежелері $(z - z_1)^{-k}$ көбейткішінің арқасында пайда бола алады. k - ақырлы сан болғандықтан, осындай дәрежелер де ақырлы.

Теорема 18. (елеулі ерекше нүкте туралы) *z_1 нүктесі $f(z)$ функциясының оқшауланған ерекше нүктесі болсын. Келесі сөйлемдер пара-пар:*
5. z_1-елеулі ерекше нукте,
6. $\lim_{z \to z_1} f(z)$ шегі табылмайды.

Дәлелдеуді қажет етпейді немесе кері жорып дәлелдейміз.